

11/03/2025

480. Να βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα A , B και Γ ώστε ο κύκλος $C : x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$:

- α. να διέρχεται από την αρχή των αξόνων,
- β. να έχει κέντρο την αρχή των αξόνων,
- γ. να έχει το κέντρο του στον άξονα xx' ,
- δ. να έχει το κέντρο του στην ευθεία $\epsilon : x - 2y + 1 = 0$,
- ε. να εφάπτεται του άξονα xx' ,
- στ. να εφάπτεται και των δύο αξόνων,
- ζ. να έχει ακτίνα ίση με 1,
- η. να έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα yy' .

ε. $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right), \quad \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

xx' εφάπτεται $C : d(K, xx') = \rho \Leftrightarrow$
 $\left| -\frac{B}{2} \right| = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} \Leftrightarrow$
 $\frac{B^2}{4} = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4} \Leftrightarrow$
 $\cancel{B^2} = A^2 + \cancel{B^2} - 4\Gamma \Leftrightarrow$
 $A^2 = 4\Gamma$

67. xx', yy' εφάπτεται $C : d(K, xx') = d(K, yy') \Leftrightarrow$
 $\left| -\frac{B}{2} \right| = \left| -\frac{A}{2} \right| \Leftrightarrow$
 $|A| = |B| \Leftrightarrow$
 $A = B \quad \eta \quad A = -B.$

3. $\rho = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = 1 \Leftrightarrow A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4.$

η. $yy' : 2$ σημεία κοινά με $C \Rightarrow$

$d(K, yy') < \rho \Leftrightarrow$
 $\left| -\frac{A}{2} \right| < \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{A^2}{4} < \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4} \Leftrightarrow$

$\cancel{A^2} < \cancel{A^2} + B^2 - 4\Gamma \Leftrightarrow$
 $B^2 > 4\Gamma$

481. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 3\lambda - 2 = 0$ παριστάνει κύκλο.

$$\begin{aligned} \dots \quad A^2 + B^2 - 4\Gamma &> 0 \Leftrightarrow \\ 10^2 + (-6)^2 - 4 \cdot (3\lambda - 2) &> 0 \Leftrightarrow \\ 100 + 36 - 12\lambda + 8 &> 0 \Leftrightarrow \\ -12\lambda &> -144 \Leftrightarrow \\ \lambda &< 12. \end{aligned}$$

485. Μια ευθεία ονομάζεται κάθετη σε μια κωνική τομή (και γενικά σε μια καμπύλη) C σε ένα σημείο της A , όταν είναι κάθετη στην εφαπτομένη της C στο A . Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που είναι κάθετη στον κύκλο $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 12$ και στην ευθεία $\epsilon: x+3y=6$.

$$\begin{aligned} C: (x+1)^2 + (y-2)^2 &= 12 \\ \text{Κέντρο } K(-1, 2) \text{ και ακτίνα } \rho &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ \epsilon: x+3y=6 \Leftrightarrow x+3y-6 &= 0, \quad \lambda_\epsilon = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$d(K, \epsilon) = \frac{|-1+3 \cdot 2-6|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Έστω $\eta: Ax + By + \Gamma = 0$ η ευθεία η οποία είναι εφαπτομένη του C και $\eta \parallel \epsilon$

$$\bullet \eta \parallel \epsilon \Leftrightarrow -\frac{A}{B} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow B = 3A \quad (1)$$

$$\bullet d(K, \eta) = \rho \Leftrightarrow \frac{|-A+2B+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

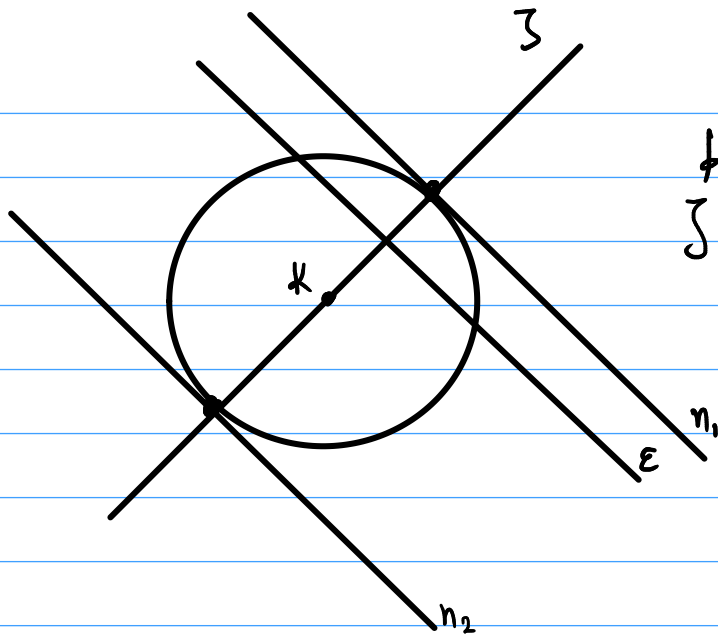
$$\Leftrightarrow (-A+2B+\Gamma)^2 = 12(A^2+B^2) \xrightarrow{(1)} (5A+\Gamma)^2 = 12(9A^2+A^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5A+\Gamma)^2 = 120A^2 \Leftrightarrow |5A+\Gamma| = 2\sqrt{30}|A| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5A+\Gamma = 2\sqrt{30} \cdot A \quad \text{ή} \quad 5A+\Gamma = -2\sqrt{30} \cdot A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma = (2\sqrt{30}-5)A \quad \text{ή} \quad \Gamma = -(2\sqrt{30}+5)A$$

$$\begin{aligned} \eta_1: Ax + 3Ay + (2\sqrt{30}-5)A &= 0 \stackrel{A \neq 0}{\Leftrightarrow} x + 3y + 2\sqrt{30} - 5 = 0 \\ \eta_2: Ax + 3Ay - (2\sqrt{30}+5)A &= 0 \stackrel{A \neq 0}{\Leftrightarrow} x + 3y - (2\sqrt{30}+5) = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \zeta \perp \varepsilon &\Leftrightarrow \lambda_{\zeta} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\zeta} = 3 \\ K(-1, 2) &\in \zeta, \text{ άρα} \\ \zeta: y - 2 &= 3(x + 1) \Leftrightarrow \\ y - 2 &= 3x + 3 \Leftrightarrow \\ 3x - y + 5 &= 0. \end{aligned}$$

486. Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$, $B(-1, 2)$ και $\Gamma(0, 2)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία το άθροισμα $(MA)^2 + (MB)^2 + (M\Gamma)^2$ είναι σταθερό και ίσο με c .

$M(x, y)$

$$(MA)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2$$

$$(MB)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5$$

$$(M\Gamma)^2 = (x-0)^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4$$

$$(MA)^2 + (MB)^2 + (M\Gamma)^2 = c \Leftrightarrow$$

$$3x^2 + 3y^2 - 6y + 11 = c \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2y + \frac{11}{3} = \frac{c}{3} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = \frac{c-8}{3} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + (y-1)^2 = \frac{c-8}{3}. \quad (1)$$

• Αν $c > 8$, τότε (1): κύκλος κέντρου $K(0, 1)$ και ακτίνας

$$\rho = \sqrt{\frac{c-8}{3}} = \frac{\sqrt{3c-24}}{3}$$

• Αν $c = 8$, τότε (1): σημείο $K(0, 1)$

• Αν $c \leq 8$, τότε (1): $\emptyset$.