08/01/2026

$ax^2+\beta x+\gamma=0,\ a\neq 0$

$\Delta>0$: $x_1=\dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$(\Delta=\beta^2-4a\gamma)$

Άθροισμα Ριζών $\quad S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{a}$

Γινόμενο Ριζών $\quad P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{a}$

Μεθοδολογία

Αν μου δίνουν 2 αριθμούς, πως βρίσκω την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς αυτούς;

Επειδή $ax^2+\beta x+\gamma=0 \overset{a\neq 0}{\Longleftrightarrow} \dfrac{ax^2}{a}+\dfrac{\beta x}{a}+\dfrac{\gamma}{a}=0 \overset{\substack{\frac{\beta}{a}=-S \\ \frac{\gamma}{a}=P}}{\Longrightarrow} x^2-Sx+P=0$

Έστω ότι μου δίνουν τους αριθμούς κ, λ.
Βρίσκω τα $S=\kappa+\lambda$ και $P=\kappa\cdot\lambda$ και αντικαθιστώ στην $x^2-Sx+P=0$ και βρίκα την ζητούμενη εξίσωση.

Πολύ βοηθητικές ταυτότητες : 1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$

2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

Ασκήσεις : 13.21, 13.23, 13.27

13.22

x_1, x_2 : ρίζες $x^2 + 5x - 4 = 0$

α) $x_1 + x_2 = ;$

$$x_1 + x_2 = S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{5}{1} = -5$$

β) $x_1 \cdot x_2 = ;$

$$x_1 \cdot x_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-4}{1} = -4$$

γ) $x_1^2 + x_2^2 = ;$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-5)^2 - 2 \cdot (-4) = 25 + 8 = 33$$

δ) $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = ;$

$$x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = -4 \cdot 33 = -132$$

ε) $(x_1 - x_2)^2 = ;$

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 33 - 2 \cdot (-4) = 33 + 8 = 41$$

στ) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = ;$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{33}{(-4)^2} = \frac{33}{16}.$$

13.24

x_1, x_2 : ρίζες της $2x^2+3x-4=0$

α) $\sqrt{x_1^2+x_2^2}=;$

$$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{3}{2} \quad \text{και} \quad P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot(-2)}=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

β) $(2x_1-3)(2x_2-3)=;$

$$(2x_1-3)(2x_2-3)=4x_1x_2-6x_1-6x_2+9=$$
$$=4x_1x_2-6(x_1+x_2)+9=4\cdot(-2)-6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+9=$$
$$=-8+9+9=10$$

γ) $(x_1+1)^2+(x_2+1)^2=;$

$$(x_1+1)^2+(x_2+1)^2=x_1^2+2x_1+1+x_2^2+2x_2+1=$$
$$=x_1^2+x_2^2+2(x_1+x_2)+2=$$
$$=\frac{25}{4}+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+2=$$
$$=\frac{25}{4}-3+2=\frac{25}{4}-1=\frac{21}{4}$$

δ) $(x_1^2-x_1x_2)(x_1x_2-x_2^2)=;$

$$(x_1^2-x_1x_2)(x_1x_2-x_2^2)=x_1(x_1-x_2)\cdot x_2(x_1-x_2)=$$
$$=x_1x_2(x_1-x_2)^2=x_1x_2(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2)=$$
$$=-2\cdot\left(\frac{25}{4}-2\cdot(-2)\right)=-2\left(\frac{25}{4}+4\right)=-2\cdot\frac{41}{4}=-\frac{41}{2}.$$