08/01/2026

• f: συνεχής στο Δ • $f'(x)=0 \ \forall\, x\in\Delta$ τότε f: σταθερή στο Δ	• f, g : συνεχείς στο Δ • $f'(x)=g'(x) \ \forall\, x\in\Delta$ τότε $\exists\, c\in\mathbb{R} : f(x)=g(x)+c \ \forall\, x\in\Delta$ σταθερά ολοκλήρωσης

1.11

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη, $f(1)=2$

$f'(x)=-\dfrac{3f(x)}{x} \quad \forall\, x>0$

α) νδο η $g(x)=x^3f(x)$: σταθερή

... $g'(x)=(x^3f(x))'=3x^2f(x)+x^3f'(x)=3x^2f(x)+x^3\left(-\dfrac{3f(x)}{x}\right)=$
$=\cancel{3x^2f(x)}-\cancel{3x^2f(x)}=0 \quad \forall\, x>0$, άρα g: σταθερή.

β) τύπος της f

g: σταθερή στο $(0,+\infty) \Longrightarrow \exists\, c\in\mathbb{R}: g(x)=c \Leftrightarrow x^3f(x)=c \ \forall\, x>0.$
Για $x=1$ είναι $f(1)=c \Rightarrow c=2$, άρα $\forall\, x>0: x^3f(x)=2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{x^3}$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)(\eta\mu x-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)\right]=;$

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)(\eta\mu x-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^3}\cdot\eta\mu x\cdot(1-\sigma\upsilon\nu x)\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^3}\cdot\eta\mu x\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3\cdot\frac{2}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)=1^3\cdot\frac{2}{1+1}=1$$

δ) Εξίσ. εφαπτ. C_f που διέρχεται από $A(0,1)$

$$f(x)=\frac{2}{x^3},\quad f'(x)=\left(2x^{-3}\right)'=-6x^{-4}=-\frac{6}{x^4}$$

$M(x_0,f(x_0))$: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Longrightarrow$

$$y-\frac{2}{x_0^3}=-\frac{6}{x_0^4}(x-x_0)\overset{x=0}{\underset{y=1}{\Longrightarrow}}$$

$$1-\frac{2}{x_0^3}=\frac{6}{x_0^3}\Longrightarrow$$

$$x_0^3-2=6\Longrightarrow$$

$$x_0^3=8\Longrightarrow$$

$$x_0=2$$

$$f(2)=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}\quad \text{και}\quad f'(2)=-\frac{6}{2^4}=-\frac{6}{16}=-\frac{3}{8}$$

$M(2,f(2))$: $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Longrightarrow$

$$y-\frac{1}{4}=-\frac{3}{8}(x-2)\Longrightarrow$$

$$y-\frac{1}{4}=-\frac{3}{8}\cdot x+\frac{3}{4}\Longrightarrow$$

$$\boxed{y=-\frac{3}{8}\cdot x+1}$$

1.13

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη

- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+(x^2-2)f(1)}{x^2+x-2}=1$
- $xf'(x)=\alpha x-2f(x)\quad \forall x>0$

α) νδό $\alpha=3$

f: παραγωγίσιμη στο 1, άρα $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Άρα ισχύει $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+(x^2-2)f(1)}{x^2+x-2}=1\iff$

$(x^2-2)f(1) = [(x^2-1)-1]f(1) = (x^2-1)f(1) - f(1)$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ \downarrow & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)+(x^2-1)f(1)}{(x-1)(x+2)} = 1 \iff$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x+2}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1} + \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)f(1)}{\cancel{x-1}}\right)\right] = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}(f'(1)+2f(1)) = 1 \Longrightarrow$$

$$f'(1)+2f(1) = 3 \Longrightarrow$$

$$f'(1) = 3-2f(1) \quad (1)$$

Στην $xf'(x) = \alpha x - 2f(x) \xRightarrow{x=1} f'(1) = \alpha - 2f(1) \xRightarrow{(1)} \alpha - \cancel{2f(1)} = 3 - \cancel{2f(1)} \Rightarrow$
$\Longrightarrow \alpha = 3.$

β) νδό η $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ σταθερή στο $(0,+\infty)$

Αφού $\alpha=3$ είναι $xf'(x) = 3x - 2f(x) \quad \forall\, x \in (0,+\infty) \quad (2)$

... $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - 3x^2 =$
$\overset{(2)}{=} 2xf(x) + x(3x - 2f(x)) - 3x^2 =$
$= \cancel{2xf(x)} + \cancel{3x^2} - \cancel{2xf(x)} - \cancel{3x^2} = 0 \quad \forall\, x>0$, άρα...

γ) $f(2) = 3$

i) τύπος της f

g: σταθερή στο $(0,+\infty) \Longrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}: g(x) = c \iff x^2 f(x) - x^3 = c \quad \forall\, x>0.$
Για $x=2$: $4 \cdot f(2) - 8 = c \Rightarrow c = 4$
Άρα $\forall\, x>0$: $x^2 f(x) - x^3 = 4 \iff f(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2}.$

ii) $\lim_{x\to 0}(f(x)\eta\mu x) = ;$

$$\lim_{x\to 0}(f(x)\eta\mu x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+4}{x^2}\cdot \eta\mu x\right) = \lim_{x\to 0}\left((x^3+4)\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{x}\right) \underline{\underline{(+4)(+1)(+\infty)}} +\infty$$