09/01/2026

1.15

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη, $f(1)=4$, $f'(1)=-2$

$f''(x)=-\dfrac{3f'(x)}{2x}\quad \forall\, x\in(0,+\infty)$

α) νδό $g(x)=2xf'(x)+f(x)$, $h(x)=\sqrt{x}\cdot f(x)$ σταθερές στο $(0,+\infty)$

... $g'(x)=2f'(x)+2xf''(x)+f'(x)=3f'(x)+2x\cdot\left(-\dfrac{3f'(x)}{2x}\right)=$

$=3f'(x)-3f'(x)=0\ \forall\, x>0$ άρα η g: σταθερή στο $(0,+\infty)$.

Άρα $\exists\, c_1\in\mathbb{R}:\ g(x)=c_1 \Longrightarrow 2xf'(x)+f(x)=c_1\ \forall\, x>0$.

Για $x=1$: $2f'(1)+f(1)=c_1 \Longrightarrow c_1=-4+4=0$.

Οπότε $\forall\, x>0$: $2xf'(x)+f(x)=0 \Longrightarrow f(x)=-2xf'(x)$ (1).

... $h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot f(x)+\sqrt{x}\cdot f'(x)\overset{(1)}{=}\dfrac{\sqrt{x}}{2x}\cdot(-2xf'(x))+\sqrt{x}\cdot f'(x)=$

$=\cancel{-\sqrt{x}f'(x)}+\cancel{\sqrt{x}f'(x)}=0\ \forall\, x>0 \Longrightarrow h$: σταθερή στο $(0,+\infty)$.

β) τύπος της f

h: σταθερή στο $(0,+\infty) \Longrightarrow \exists\, c_2\in\mathbb{R}:\ h(x)=c_2 \Rightarrow \sqrt{x}f(x)=c_2\ \forall\, x>0$.

Για $x=1$: $f(1)=c_2 \longrightarrow c_2=4$, άρα $\sqrt{x}f(x)=4 \Longleftrightarrow f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x}}$, $x>0$.

γ) νδό $f:1-1$ κ' $f^{-1}=$;

$\forall\, x_1,x_2>0:\ x_1<x_2 \longrightarrow \sqrt{x_1}<\sqrt{x_2} \Longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x_1}}>\dfrac{1}{\sqrt{x_2}} \Longrightarrow \dfrac{4}{\sqrt{x_1}}>\dfrac{4}{\sqrt{x_2}} \longrightarrow$

$\Longrightarrow f(x_1)>f(x_2)$, άρα $f:\downarrow (0,+\infty)$ οπότε $f:1-1$ ως γν. μονότονη.

f: συνεχής με $f:\downarrow(0,+\infty)$ είναι $f((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=$

$=\dots=(0,+\infty)$

$f:1-1 \Longrightarrow f$: αντιστρέψιμη δηλαδή ορίζεται η f^{-1} με $D_{f^{-1}}=f((0,+\infty))=(0,+\infty)$

και $y=f(x) \Longleftrightarrow y=\dfrac{4}{\sqrt{x}} \Longleftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{4}{y} \Longrightarrow x=\dfrac{16}{y^2} \Longrightarrow f^{-1}(y)=\dfrac{16}{y^2}$.

Άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{16}{x^2}$, $x>0$.

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(f^{-1}(x)-f(x)\right)=;$

$$\lim_{x\to 0}\left(f^{-1}(x)-f(x)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{16}{x^2}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)\overset{u=\sqrt{x}}{=\!=\!=}\lim_{u\to 0}\left(\frac{16}{u^4}-\frac{4}{u}\right)=$$

$$=\lim_{u\to 0}\left(\frac{16-4u^3}{u^4}\right)=\lim_{u\to 0}\left((16-4u^3)\cdot\frac{1}{u^4}\right)\overset{(+16)(+\infty)}{=\!=\!=}+\infty.$$

1.17

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη, $f(2)=5$

$f'(x)=2x+3\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

α) τύπος της f

Θεώρημα

- f, g : συνεχείς στο Δ
- $f'(x)=g'(x)\ \forall\ x\in\Delta$

τότε

$\exists\ c\in\mathbb{R}:\ f(x)=g(x)+c$

$\forall\ x\in\mathbb{R}:\ f'(x)=2x+3 \Longrightarrow f'(x)=(x^2+3x)'$ άρα από Θεώρημα

$\exists\ c\in\mathbb{R}:\ f(x)=x^2+3x+c\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}.$

Για $x=2$: $f(2)=4+6+c \Longrightarrow c=-5$, άρα $f(x)=x^2+3x-5,\ x\in\mathbb{R}.$

β) εφαπτ. C_f σχημ. 45° με xx'

$f'(x)=2x+3,\ x\in\mathbb{R}$

Λύνουμε την $f'(x)=\text{εφ}45° \Longrightarrow 2x+3=1 \Rightarrow x=-1$

$f(-1)=1-3-5=-7.$

$M(-1,f(-1))$: $y-f(-1)=f'(-1)(x+1) \Longrightarrow y+7=x+1 \Leftrightarrow y=x-6.$

1.20

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη, $f(0)=0$

$f'(x)=2x\,\text{ημ}x+x^2\text{συν}x\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

α) τύπος της f

$\forall\ x\in\mathbb{R}:\ f'(x)=2x\,\text{ημ}x+x^2\text{συν}x \Longrightarrow$

$f'(x)=(x^2)'\text{ημ}x+x^2(\text{ημ}x)' \Longrightarrow$

$f'(x)=(x^2\text{ημ}x)'$ άρα $\exists\ c\in\mathbb{R}:\ f(x)=x^2\text{ημ}x+c,\ x\in\mathbb{R}.$

Για $x=0$: $f(0)=c \Longrightarrow c=0$ άρα $f(x)=x^2ημx$, $x\in\mathbb{R}$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2ημx+x^3συνx}{x^2ημx}=\lim_{x\to 0}\frac{2ημx+xσυνx}{ημx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{ημx}{x}+συνx}{\frac{ημx}{x}}=\frac{2\cdot 1+1}{1}=3.$$

1.21

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη

$f'(x)=\dfrac{ημx+συνx}{e^x}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$

Η εφαπτ. ε της C_f στο $M(0,f(0))$ διέρχεται από $K(2,3)$

α) νδό $f(0)=1$

Στην $f'(x)=\dfrac{ημx+συνx}{e^x} \xRightarrow{x=0} f'(0)=\dfrac{συν0}{e^0}=1$

$M(0,f(0))$: $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Longrightarrow y-f(0)=x\Longrightarrow y=x+f(0)$

$K(2,3)\in ε$ άρα $3=2+f(0)\Longrightarrow f(0)=1$.

β) τύπος της f

$\forall\ x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\dfrac{ημx+συνx}{e^x}\Longrightarrow$

$f'(x)=\dfrac{ημx\cdot e^x+συνx\cdot e^x}{e^{2x}}\Longrightarrow$

$f'(x)=-\dfrac{-ημx\cdot e^x-συνx\cdot e^x}{e^{2x}}\Longrightarrow$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

$$f'(x) = -\frac{(\sigma\upsilon\nu x)' e^x - \sigma\upsilon\nu x\cdot(e^x)'}{(e^x)^2} \Longrightarrow$$

$f'(x) = \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}\right)'$ άρα από Θεώρημα $\exists\, c\in\mathbb{R}$:

$f(x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x} + c \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$

Για $x=0$: $f(0) = -1 + c \Longrightarrow c = 2$, άρα $f(x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x} + 2 \ \forall x\in\mathbb{R}.$

1.27

$f: (0,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη

$f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$, $x>0$

εφαπτ. C_f στο $A(1,f(1))$: $-2x + y - 1 = 0$

α) $f'(1), f(1) =$;

$A(1,f(1))$: $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Longrightarrow$

$y - f(1) = f'(1)\cdot x - f'(1) \Longrightarrow$

$-f'(1)\cdot x + y + f'(1) - f(1) = 0$

$A(1,f(1))$: $-2x + y - 1 = 0$

ισχύει $\begin{cases} -f'(1) = -2 \\ f'(1) - f(1) = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1) = 2 \\ f(1) = f'(1) + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1) = 2 \\ f(1) = 3 \end{cases}$

β) τύπος της f

$\forall\, x\in(0,+\infty)$: $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2} \Longrightarrow f''(x) = \left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)'$ άρα $\exists\, c_1\in\mathbb{R}$:

$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} + c_1 \quad \forall\, x>0.$

Για $x=1$: $f'(1) = 3 + 1 + c_1 \Longrightarrow 2 = 4 + c_1 \Longrightarrow c_1 = -2$

άρα $\forall\, x>0$: $f'(x) = 3x^2 - 2 + \frac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = (x^3 - 2x + \ln x)'$

οπότε $\exists\, c_2\in\mathbb{R}$: $f(x) = x^3 - 2x + \ln x + c_2$, $x>0$.

Για $x=1$: $f(1) = 1 - 2 + \ln 1 + c_2 \Longrightarrow c_2 = 4$

Οπότε $f(x) = x^3 - 2x + 4 + \ln x$, $x>0$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ;$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3 - 2x + 4 + \ln x\right) = \dots = +\infty$$

Ασκήσεις: 1.16,
1.18, 1.19, 1.22, 1.23, 1.24, 1.25, 1.26, 1.29, 1.30, 1.31

1.32

$f: (0, \overset{\mathbb{R}}{\cancel{+\infty}}) \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη, $f(\pi) = 0$

$x f'(x) + f(x) = συν x \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$

α) τύπος της f

$\forall \; x \in \mathbb{R}: \quad x f'(x) + f(x) = συν x \Longrightarrow (x f(x))' = (ημ x)'$ άρα $\exists \; c \in \mathbb{R}$:
$x f(x) = ημ x + c, \; x \in \mathbb{R}$.

Για $x = \pi$: $\pi f(\pi) = ημ\pi + c \Longrightarrow c = 0$, άρα $x f(x) = ημ x \xRightarrow{x \neq 0} f(x) = \frac{ημ x}{x}$.

f: συνεχής στο $0 \Longrightarrow f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{ημ x}{x} = 1$.

Οπότε $f(x) = \begin{cases} \frac{ημ x}{x}, & αν \; x \neq 0 \\ 1, & αν \; x = 0 \end{cases}$.

1.33 σπίτι

1.37

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη, $f(\pi)=0$

$xe^x f'(x)+e^x f(x)=\text{συν}x-\text{ημ}x \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$

τύπος της f

$$\left(\frac{\text{ημ}x}{e^x}\right)'=\frac{\text{συν}x\, e^x-\text{ημ}x\cdot e^x}{e^{2x}}=$$
$$=\frac{\text{συν}x-\text{ημ}x}{e^x}$$

$\forall\, x\in\mathbb{R}$: $\quad xe^x f'(x)+e^x f(x)=\text{συν}x-\text{ημ}x \iff$

$$xf'(x)+f(x)=\frac{\text{συν}x-\text{ημ}x}{e^x}$$

$$(xf(x))'=\left(\frac{\text{ημ}x}{e^x}\right)' \quad \text{άρα } \exists\, c\in\mathbb{R}:$$

$$xf(x)=\frac{\text{ημ}x}{e^x}+c \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Για $x=\pi$: $\quad \pi f(\pi)=\frac{\text{ημ}\pi}{e^\pi}+c \Longrightarrow c=0.$

Άρα $\forall\, x\in\mathbb{R}$: $\quad xf(x)=\frac{\text{ημ}x}{e^x} \Longrightarrow f(x)=\frac{\text{ημ}x}{xe^x}.$