**09/01/2026**

393. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες με εξίσωση της μορφής

$$\left(\alpha^2+1\right)x+(\alpha-1)\,y-3\alpha^2+\alpha-4=0$$

με $\alpha \in R$, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Για δύο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου βρίσκω τις εξισώσεις 2 ευθειών της οικογένειας.

Λύνω το (Σ) των δύο ευθειών και βρίσκω το σημείο τομής τους.

Για $\alpha=0$: $x-y-4=0$ $(\varepsilon_1)$

Για $\alpha=1$: $2x-3+1-4=0 \Longrightarrow x=3$ $(\varepsilon_2)$

Είναι $(\Sigma)_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} \begin{cases} x-y-4=0 \\ x=3 \end{cases} \Longrightarrow 3-y-4=0 \Longrightarrow y=-1$

Άρα $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται στο $A(3,-1)$

Θα δ.ό. όλες οι ευθείες διέρχονται από το A.

Δείχνουμε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το σημείο αυτό.

(Αντικαθιστώ στη γενική εξίσωση και προκύπτει αόριστη εξίσωση ως προς τη παράμετρο).

$(\alpha^2+1)x+(\alpha-1)y-3\alpha^2+\alpha-4=0 \xrightarrow[y=-1]{x=3}$

$3(\alpha^2+1)-(\alpha-1)-3\alpha^2+\alpha-4=0 \Longleftrightarrow$

$\cancel{3\alpha^2}+\cancel{3}-\alpha+\cancel{1}-\cancel{3\alpha^2}+\alpha-\cancel{4}=0 \Longrightarrow$

$0\alpha=0$ αόριστη ως προς $\alpha$,

άρα το ζεύγος $x=3, y=-1$ επαληθεύει την εξίσωση $\forall \alpha \in R$, οπότε όλες οι ευθείες της εξίσωσης διέρχονται από το $A(3,-1)$.

386. Να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in R$ για τις οποίες οι ευθείες $\epsilon_1: (\mu-1)\,x+\mu y+3=0$ και $\epsilon_2: (\mu+2)\,x+\left(1-\mu^2\right)y+4=0$ είναι κάθετες.

$Ax+By+\Gamma=0$

όταν $B\neq 0$, έχει $\lambda=-\frac{A}{B}$

$\varepsilon_1: (\mu-1)x+\mu y+3=0$

$\lambda_1=-\frac{\mu-1}{\mu}=\frac{1-\mu}{\mu}$, όταν $\mu\neq 0$

$\varepsilon_2: (\mu+2)x+(1-\mu^2)y+4=0$

$\lambda_2=-\frac{\mu+2}{1-\mu^2}=\frac{\mu+2}{\mu^2-1}$, όταν $\mu\neq 1$ και $\mu\neq -1$

• Αν ($\mu\neq 0$ και $\mu\neq 1$ και $\mu\neq -1$), τότε:

$$\varepsilon_1\perp\varepsilon_2 \Longrightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2=-1 \Longrightarrow$$

$$\frac{1-\mu}{\mu}\cdot\frac{\mu+2}{\mu^2-1}=-1$$

$$-\frac{\cancel{1-\mu}}{\mu}\cdot\frac{\mu+2}{\cancel{(1-\mu)}(1+\mu)}=-1$$

$$\mu(\mu+1)=\mu+2 \Longleftrightarrow$$

$$\mu^2+\cancel{\mu}-\cancel{\mu}-2=0 \Longleftrightarrow$$

$$\mu^2=2 \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\mu=\sqrt{2}} \text{ ή } \boxed{\mu=-\sqrt{2}}$$

• Αν $\mu=0$, τότε $\varepsilon_1: -x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$, άρα $\varepsilon_1\perp x'x$ και $\varepsilon_2: 2x+y+4=0$. Άρα $\varepsilon_1 \not\perp \varepsilon_2$ οπότε η τιμή $\mu=0$ απορρίπτεται.

• Αν $\mu=1$, τότε $\varepsilon_1: y+3=0 \Leftrightarrow y=-3$, άρα $\varepsilon_1 \parallel xx'$ και $\varepsilon_2: 3x+4=0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}$, άρα $\varepsilon_2\perp xx'$. Οπότε $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$ άρα η $\boxed{\mu=1}$ είναι αποδεκτή τιμή.

• Αν $\mu=-1$, τότε $\varepsilon_1: -2x-y+3=0$ και $\varepsilon_2: x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$, άρα $\varepsilon_2\perp xx'$. Οπότε $\varepsilon_1\not\perp\varepsilon_2$ άρα η τιμή $\mu=-1$ απορρίπτεται.

379. Έστω σημείο $M(x_o, y_o)$ που δεν ανήκει στους άξονες συντεταγμένων. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε, η οποία διέρχεται από το Μ και είναι κάθετη στην ευθεία ΟΜ (όπου Ο η αρχή των αξόνων).

$x_o, y_o\neq 0$

$$\lambda_{OM}=\frac{y_o}{x_o}$$

$$\varepsilon\perp OM \Longrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{OM}=-1 \Longrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\frac{y_o}{x_o}=-1 \Rightarrow \lambda_\varepsilon=-\frac{x_o}{y_o}$$

$$\varepsilon: y-y_o=-\frac{x_o}{y_o}\cdot(x-x_o) \Longrightarrow y_o\cdot y-y_o^2=-x_o\cdot x+x_o^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{x_o\cdot x+y_o\cdot y-(x_o^2+y_o^2)=0}$$

375. Να βρεθεί η οξεία γωνία $\vartheta$ που σχηματίζουν μεταξύ τους οι ευθείες $\epsilon_1 : -\sqrt{3}x + y + 2 = 0$ και $\epsilon_2 : -x + \sqrt{3}y - 1 = 0$.

Μου ζητάει να βρω γωνία μεταξύ 2 ευθειών

Βρίσκω τους συντελεστές διεύθυνσης των 2 ευθειών

Βρίσκω δύο διανύσματα παράλληλα στις 2 ευθείες

Θυμάμαι ότι το $\vec{\delta} = (B, -A)$ είναι παράλληλο στην $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ διότι $\lambda_{\vec{\delta}} = -\frac{A}{B} = \lambda_{\varepsilon}$.

Βρίσκω τη γωνία που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα και αν ψάχνω:

- οξεία γωνία

  Ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = \left|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\delta_1}, \vec{\delta_2}})\right|$

- αμβλεία γωνία

  Ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = -\left|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\delta_1}, \vec{\delta_2}})\right|$

$\varepsilon_1 : -\sqrt{3}x + y + 2 = 0$

$$\lambda_1 = -\frac{-\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$\varepsilon_2 : -x + \sqrt{3}y - 1 = 0$

$$\lambda_2 = -\frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Έστω $\vec{\delta_1} = (1, \sqrt{3})$ και $\vec{\delta_2} = (\sqrt{3}, 1)$.

Ισχύει $\vec{\delta_1} \parallel \varepsilon_1$ και $\vec{\delta_2} \parallel \varepsilon_2$

Είναι $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \left|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\delta_1}, \vec{\delta_2}})\right| =$

$$= \left|\frac{\vec{\delta_1} \cdot \vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}| \cdot |\vec{\delta_2}|}\right| =$$

$$= \frac{|1 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \longrightarrow \boxed{\vartheta = \frac{\pi}{6}}$$