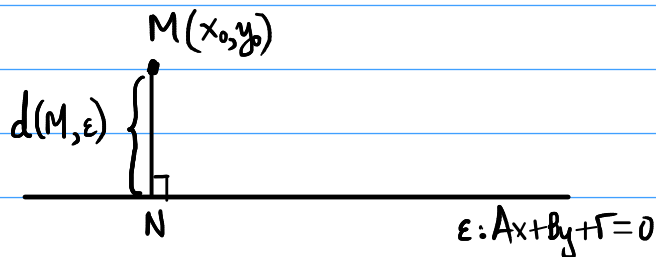


12/01/2026

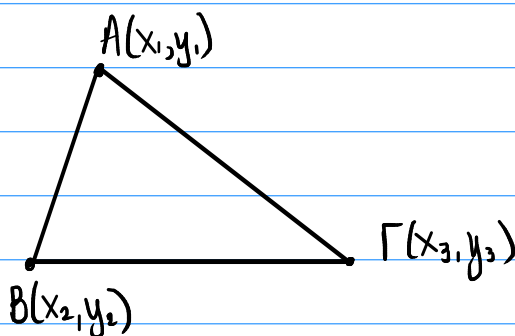
Απόσταση σημείου από ευθεία

$$d(M, \epsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Εμβαδόν τριγώνου

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})|$$



376. α. Να βρεθεί η οξεία γωνία θ που σχηματίζουν μεταξύ τους οι ευθείες $\epsilon: x - y\sqrt{3} + 4 = 0$ και $\zeta: x = 2$.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ζ η οποία διέρχεται από το σημείο $P(2, 1)$ και σχηματίζει με την ευθεία $\epsilon: x - y\sqrt{3} + 4 = 0$ οξεία γωνία θ ίση με 30° .

α) $\epsilon: x - y\sqrt{3} + 4 = 0$, $\lambda_\epsilon = -\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \epsilon\phi 30^\circ$ άρα η ϵ σχηματίζει 30° με τον xx' .

$\zeta: x = 2$ ($\perp xx'$) δηλαδή σχηματίζει 90° με τον xx'
Άρα $\theta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

β) $\epsilon: x - y\sqrt{3} + 4$, $\lambda_\epsilon = \frac{\sqrt{3}}{3} = \epsilon\phi 30^\circ$

Αφού η ζητούμενη ευθεία σχηματίζει 30° με την ϵ αυτό συνεπάγεται ότι θα σχηματίζει με τον xx' :

60° ή 0° γωνία, άρα:
 $\lambda = \epsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}$ ή $\lambda = \epsilon\phi 0^\circ = 0$

- Αν $\lambda = \sqrt{3}$, τότε:

$$\mathcal{J}: y - 1 = \sqrt{3}(x - 2) \iff$$

$$\boxed{y = \sqrt{3} \cdot x + 1 - 2\sqrt{3}}$$

- Αν $\lambda = 0$, τότε:

$$\mathcal{J}: y = 1$$

388. Να βρεθεί η οξεία γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι ευθείες $\epsilon_1: 2\lambda x - (\lambda + 1)y + \mu = 0$ και $\epsilon_2: (3\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + \kappa = 0$.

$$\epsilon_1: 2\lambda x - (\lambda + 1)y + \mu = 0, \quad \lambda_1 = -\frac{2\lambda}{-(\lambda + 1)} = \frac{2\lambda}{\lambda + 1}, \quad \lambda \neq -1$$

$$\epsilon_2: (3\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + \kappa = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{3\lambda + 1}{\lambda - 1}, \quad \lambda \neq 1$$

- Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$, τότε:

$$\text{Έστω } \vec{\delta}_1 = (\lambda + 1, 2\lambda) // \epsilon_1 \text{ και } \vec{\delta}_2 = (1 - \lambda, 3\lambda + 1) // \epsilon_2$$

Έστω ϕ η οξεία γωνία των ϵ_1, ϵ_2 .

$$\text{Τότε } \sin \phi = |\sin(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2)| = \frac{|\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2|}{|\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2|} =$$

$$= \frac{|(\lambda + 1)(1 - \lambda) + 2\lambda(3\lambda + 1)|}{\sqrt{(\lambda + 1)^2 + (2\lambda)^2} \cdot \sqrt{(1 - \lambda)^2 + (3\lambda + 1)^2}} = \frac{|1 - \lambda^2 + 6\lambda^2 + 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 1 + 4\lambda^2} \cdot \sqrt{1 - 2\lambda + \lambda^2 + 9\lambda^2 + 6\lambda + 1}} =$$

$$= \frac{|5\lambda^2 + 2\lambda + 1|}{\sqrt{5\lambda^2 + 2\lambda + 1} \cdot \sqrt{10\lambda^2 + 4\lambda + 2}} = \frac{5\lambda^2 + 2\lambda + 1}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{5\lambda^2 + 2\lambda + 1})^2} =$$

$$= \frac{\cancel{5\lambda^2 + 2\lambda + 1}}{\sqrt{2} \cdot (\cancel{5\lambda^2 + 2\lambda + 1})} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ \implies \phi = 45^\circ.$$

- Αν $\lambda = 1$, τότε $\epsilon_1: 2x - 2y + \mu = 0 \implies x - y + \frac{\mu}{2} = 0$

με $\lambda_1 = -\frac{1}{-1} = 1 = \sin 45^\circ$, άρα η ϵ_1 σχηματίζει 45° με xx' και

$\epsilon_2: 4x + \kappa = 0 \implies x = -\frac{\kappa}{4}$ ($\perp xx'$) άρα η ϵ_2 σχηματίζει 90° με xx'

οπότε $\phi = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

- Αν $\lambda = -1$, τότε $\varepsilon_1: -2x + \mu = 0 \rightarrow x = \frac{\mu}{2} (\perp xx')$ άρα η ε_1 χρησιμοποιεί 90° με xx' και $\varepsilon_2: -2x - 2y + \kappa = 0 \Rightarrow x + y - \frac{\kappa}{2} = 0$
 $\lambda_2 = -\frac{1}{1} = -1 = -\varepsilon\phi 45^\circ = \varepsilon\phi 135^\circ$ άρα η ε_2 χρησιμοποιεί 135° με xx' οπότε $\phi = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$.