

14/01/2026

Απόσταση σημείου $M(x_0, y_0)$
από ευθεία $\epsilon: Ax + By + \Gamma = 0$

$$d(M, \epsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Εμβαδοί $\triangle AB\Gamma$ όπου $A(x_1, y_1)$,
 $B(x_2, y_2)$ ή $\Gamma(x_3, y_3)$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})|$$

390. Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών $\epsilon_1: x \cdot \sigma\upsilon\nu\phi + y \cdot \eta\mu\phi + 1 = 0$ και $\epsilon_2: y = x \cdot \epsilon\phi\theta - 3$ όπου $0 < \phi < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$$\epsilon_1: x \cdot \sigma\upsilon\nu\phi + y \cdot \eta\mu\phi + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{\sigma\upsilon\nu\phi}{\eta\mu\phi} \text{ και έστω } \vec{\delta}_1 = (\eta\mu\phi, -\sigma\upsilon\nu\phi) \parallel \epsilon_1$$

$$\epsilon_2: y = x \cdot \epsilon\phi\theta - 3$$

$$\lambda_2 = \epsilon\phi\theta \text{ και έστω } \vec{\delta}_2 = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta) \parallel \epsilon_2$$

Έστω ω η οξεία γωνία των ϵ_1, ϵ_2 . Τότε:

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\omega &= |\sigma\upsilon\nu(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2)| = \frac{|\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2|}{|\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2|} = \frac{|\eta\mu\phi \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\phi \cdot \eta\mu\theta|}{\sqrt{\eta\mu^2\phi + (\sigma\upsilon\nu\phi)^2} \cdot \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta}} = \\ &= |\eta\mu\phi \sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\phi \eta\mu\theta| = |\eta\mu(\phi - \theta)| = |\eta\mu(\theta - \phi)| = \eta\mu(\theta - \phi) = \\ &= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - (\theta - \phi)\right) \implies \boxed{\omega = \frac{\pi}{2} - \theta + \phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta\mu(\alpha + \beta) &= \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \eta\mu\beta \\ \eta\mu(\alpha - \beta) &= \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \eta\mu\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) &= \sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu 2\alpha &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\eta\mu^2\alpha \end{aligned}$$

$$\sin 2x = 2\sin^2 x - 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 + \sin 2x}{2}$$

$$\int_0^1 \sin^2 x \, dx = \int_0^1 \frac{1 + \sin 2x}{2} \, dx = \dots$$

403. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $M(5, -6)$ από την ευθεία $\epsilon: y = 3x - 1$.

$$\epsilon: y = 3x - 1 \Rightarrow 3x - y - 1 = 0.$$

$$d(M, \epsilon) = \frac{|3 \cdot 5 - (-6) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = \frac{20\sqrt{10}}{10} = 2\sqrt{10}$$

411. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $A(-2, 3)$, $B(-1, 5)$ και $\Gamma(6, 13)$.

$$\vec{AB} = (-1 + 2, 5 - 3) = (1, 2)$$

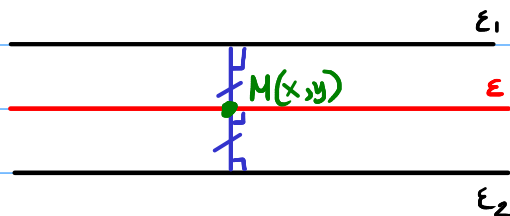
$$\vec{A\Gamma} = (6 + 2, 13 - 3) = (8, 10)$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |10 - 16| = \frac{6}{2} = 3 \text{ τ.ψ.}$$

408. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλου των ευθειών $\epsilon_1: 5x + 12y - 1 = 0$ και $\epsilon_2: 5x + 12y + 15 = 0$.

Έστω $M(x, y)$ ένα σημείο της μεσοπαράλληλου των ϵ_1 και ϵ_2 .

Τότε ισχύει:



$$d(M, \epsilon_1) = d(M, \epsilon_2) \Rightarrow \frac{|5x + 12y - 1|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|5x + 12y + 15|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \Rightarrow$$

$$|5x + 12y - 1| = |5x + 12y + 15| \Rightarrow 5x + 12y - 1 = 5x + 12y + 15 \quad \vee \quad 5x + 12y - 1 = -5x - 12y - 15 \Rightarrow$$

$$0x + 0y = 16 \quad n' \quad 10x + 24y + 14 = 0 \implies$$

(adivdru)

$$\epsilon: 5x + 12y + 7 = 0$$