

21/01/2026

Εμβαδόν τριγώνου $\triangle AB\Gamma$
όπου $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \Gamma(x_3, y_3)$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})|$$

Απόσταση σημείου $M(x_0, y_0)$
από ευθεία $\epsilon: Ax + By + \Gamma = 0$:

$$d(M, \epsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

402. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ), αν πιστεύετε ότι είναι αντίστοιχα ορθή ή λανθασμένη.

α. Η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\epsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ είναι ίση με

$$d(M, \epsilon) = \frac{Ax_0 + By_0 + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad \text{Λάθος}$$

β. Η απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία $\epsilon: y = \lambda x + \beta$ είναι ίση με $\frac{\beta}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$. Λάθος

γ. Η απόσταση του σημείου $A(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\epsilon: x = \alpha$ είναι ίση με $|x_0 - \alpha|$ και η απόσταση του A από την ευθεία $\zeta: y = \beta$ είναι ίση με $|\beta - y_0|$. Σωστό

δ. Η απόσταση των παράλληλων ευθειών $\epsilon_1: y = \lambda x + \beta_1$ και $\epsilon_2: y = \lambda x + \beta_2$ είναι ίση με $|\beta_1 - \beta_2|$. Λάθος

ε. Από τα σημεία $A(1, 3), B(-3, 1)$ και $\Gamma(2, 2)$ τη μεγαλύτερη απόσταση από την ευθεία $\epsilon: y = x$ έχει το A και τη μικρότερη το Γ . Λάθος

στ. Για το εμβαδόν E ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $E = \frac{1}{2} \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})$. Λάθος

ζ. Για το εμβαδόν E ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $E = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})|$. Σωστό

$$\beta) \quad \epsilon: y = \lambda x + \beta \Rightarrow \lambda x - y + \beta = 0$$

$$d(O, \epsilon) = \frac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \frac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

$$\gamma) \quad \epsilon: x = \alpha \Rightarrow x - \alpha = 0 \quad d(A, \epsilon) = \frac{|x_0 - \alpha|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x_0 - \alpha|$$

$$\zeta: y = \beta \Rightarrow y - \beta = 0 \quad d(A, \zeta) = |y_0 - \beta|$$

$$\delta) \quad \epsilon_1: y = \lambda x + \beta_1 \quad \text{όρα} \quad A(0, \beta_1) \in \epsilon_1$$

$$\epsilon_2: y = \lambda x + \beta_2 \Rightarrow \lambda x - y + \beta_2 = 0$$

$$d(\epsilon_1, \epsilon_2) = d(A, \epsilon_2) = \frac{|\lambda \cdot 0 - \beta_1 + \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \frac{|-\beta_1 + \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

$$\epsilon) \quad A(1, 3), B(-3, 1), \quad \epsilon: y = x \Rightarrow x - y = 0$$

$$d(A, \epsilon) = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$d(B, \epsilon) = \frac{|-3 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

η. Αν $\vec{AB} = (3, 4)$ και $\vec{B\Gamma} = (1, 2)$, τότε $(AB\Gamma) = 1$. Σωστό

θ. Για το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = 2(AB\Gamma)$ ή $\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = -2(AB\Gamma)$. Σωστό

ι. Το εμβαδόν του τριγώνου που έχει ως κορυφές τα σημεία $O(0, 0)$, $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$ είναι ίσο με $\frac{\alpha\beta}{2}$. Λάθος

$$\eta) \vec{AB} = (3, 4) \implies \vec{BA} = (-3, -4) \\ \vec{B\Gamma} = (1, 2)$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{BA}, \vec{B\Gamma})| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-3 \cdot 2 - 1 \cdot (-4)| = \\ = \frac{1}{2} |-6 + 4| = \frac{|-2|}{2} = 1 \text{ τετραγ. μονάδα}$$

$$\theta) (AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})| \implies |x| = 9 \implies x = 9 \text{ ή } x = -9 \\ |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})| = 2(AB\Gamma) \implies \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = 2(AB\Gamma) \text{ ή } \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = -2(AB\Gamma)$$

431. Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(-2, 2)$ και $\Gamma(\lambda + 1, \lambda^2 + 2)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα σημεία A , B και Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει εμβαδόν ίσο με $\frac{5}{2}$.

$$\alpha) \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} -2-1 & 2-1 \\ \lambda+1-1 & \lambda^2+2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ \lambda & \lambda^2+1 \end{vmatrix} = \\ = -3(\lambda^2+1) - \lambda \cdot 1 = -3\lambda^2 - 3 - \lambda = -3\lambda^2 - \lambda - 3, \lambda \in \mathbb{R} \\ \Delta = (-1)^2 - 4(-3)(-3) = 1 - 36 = -35 < 0 \\ \text{άρα } \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) \neq 0 \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies \vec{AB} \not\parallel \vec{A\Gamma} \text{ άρα } \dots$$

$$\beta) (AB\Gamma) = \frac{5}{2} \implies \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})| = \frac{5}{2} \implies$$

$$\implies |-3\lambda^2 - \lambda - 3| = 5 \implies |3\lambda^2 + \lambda + 3| = 5$$

$$\implies 3\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \text{ ή } 3\lambda^2 + \lambda + 8 = 0$$

...