

21/01/2026

292. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0$$

με $\lambda \in (0, 2)$.

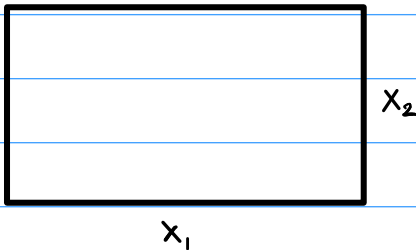
α. Να βρείτε:

- Την περίμετρο του ορθογωνίου.
- Το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

β. Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$.

γ. Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1;
Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

α)



$$\begin{aligned} \text{i) } \Pi &= 2x_1 + 2x_2 = \\ &= 2(x_1 + x_2) = \\ &= 2S = 2 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

$$\text{ii) } E = x_1 x_2 = P = \lambda(2 - \lambda) = 2\lambda - \lambda^2$$

$$\beta) \text{ Για κάθε } \lambda \in (0, 2): E \leq 1 \implies$$

$$2\lambda - \lambda^2 \leq 1 \implies$$

$$-\lambda^2 + 2\lambda - 1 \leq 0 \implies$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \implies$$

$$(\lambda - 1)^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει ως τετράγωνο,}$$

άρα θα ισχύει και η σχέση από την οποία ξεκινήσαμε.

$$\gamma) \quad \forall \lambda \in (0, 2): E \leq 1$$

$$\text{Είναι } E = 1 \implies (\lambda - 1)^2 = 0 \implies \boxed{\lambda = 1}$$

$$\text{Για } \lambda = 1 \text{ είναι: } x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \text{ άρα } x_{1,2} = -\frac{-2}{2} = 1$$

Άρα $x_1 = 1$ και $x_2 = 1$ οπότε το ορθογώνιο στην περίπτωση που το εμβαδόν είναι μέγιστο είναι τετράγωνο.

$$\alpha=1, \beta=-5\lambda, \gamma=-1$$

290. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in R$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες ισχύει

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0$$

ii. Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$.

α) $\Delta = (-5\lambda)^2 - 4 \cdot (-1) = 25\lambda^2 + 4 > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{ διότι:}$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda^2 \geq 0 \Rightarrow 25\lambda^2 \geq 0 \Rightarrow 25\lambda^2 + 4 \geq 4 > 0 \Rightarrow \Delta > 0.$

β) i) $(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0 \Rightarrow$

$$S^2 - 18 - 7P^{24} = 0 \Rightarrow$$

$$(5\lambda)^2 - 18 - 7 \cdot (-1)^{24} = 0 \Rightarrow$$

$$25\lambda^2 - 18 - 7 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$$

$$25\lambda^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow$$

$$|\lambda| = 1 \Rightarrow$$

$$\lambda = 1 \vee \lambda = -1.$$

$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -0$$

ii) Για $\lambda = 1$ είναι $S = 5\lambda = 5$ και $P = -1$

Είναι $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2 =$

$$= x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2) + 4 =$$

$$= -1 \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 4 =$$

$$= -5 - 15 + 4 =$$

$$= -20 + 4 = -16.$$

$$\alpha=1, \beta=-2\lambda, \gamma=4\lambda+5$$

297. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ τέτοια, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

γ. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες.

δ. Αν $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ τότε να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

α) (1) $\xrightarrow{\lambda=5} x^2 - 10x + 20 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0.$

Είναι $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 25 = 100 - 100 = 0,$

άρα η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

β) Για να έχει η (1) διπλή ρίζα πρέπει $\Delta = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (-2\lambda)^2 - 4(4\lambda + 5) = 0 \Rightarrow 4\lambda^2 - 16\lambda - 20 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

$\Delta_\lambda = (-4)^2 - 4 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 > 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$

Άρα $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda = 5$ ή $\lambda = -1$

Οπότε η (1) έχει διπλή ρίζα και για $\lambda = -1$.

γ) (1): Δύο ρίζες άνισες πρέπει $\Delta > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 > 0 \Rightarrow \lambda < -1$ ή $\lambda > 5$

δ) $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5, \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$

Είναι $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5 \Rightarrow$

$|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = -(\lambda^2 - 4\lambda - 5) \Rightarrow$

$|\Delta| = -\Delta \Rightarrow$

$\Delta < 0$

$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, \alpha \geq 0 \\ -\alpha, \alpha < 0 \end{cases}$

άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Ασκήσεις:

284. Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in R - \{0\}$.

- α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R - \{0\}$.
- β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, τότε να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.
- γ. Αν $\lambda > 0$, τότε το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- δ. Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

287. α. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β. Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in R$. Να δείξετε ότι, αν $\gamma < 0$, τότε:

i. $\beta^2 - 4\gamma > 0$,

ii. η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

291. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0$$

με $\lambda \in (0, 4)$.

α. Να βρείτε:

- i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ ,
- ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

β. Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0, 4)$.

γ. Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;