

23/01/2026

429. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1 : x + y = 0$ και $\epsilon_2 : x - y - 4 = 0$. Να βρείτε:

α. το σημείο τομής A των ϵ_1 και ϵ_2 ,

β. τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τις ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 αντίστοιχα είναι ίσος με 2.

$$a) \quad \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=4 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2x=4 \Rightarrow x=2 \text{ και } 2+y=0 \Rightarrow y=-2.$$

Άρα ϵ_1, ϵ_2 τέμνονται στο $A(2, -2)$.

β) Έστω $M(x, y)$ ένα σημείο του ζητούμενου χ.τ.

$$\text{Ισχύει } \frac{d(M, \epsilon_1)}{d(M, \epsilon_2)} = 2 \Rightarrow$$

$$\frac{d(M, \epsilon_1)}{d(M, \epsilon_2)} = 2 \Rightarrow \frac{|x+y|}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{|x-y-4|}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$|x+y| = |2x-2y-8| \Rightarrow$$

$$x+y = 2x-2y-8 \quad \text{ή} \quad x+y = -2x+2y+8 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x-3y-8 &= 0 & \text{ή} & & 3x-y-8 &= 0 \\ (\epsilon_3) & & & & (\epsilon_4) \end{aligned}$$

427. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $M(4, 1)$ και απέχει από το σημείο $N(5, 3)$ απόσταση ίση με 1.

Έστω $\epsilon: Ax + By + \Gamma = 0$, $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

$$\text{Ισχύει } M(4, 1) \in \epsilon, \text{ άρα } 4A + B + \Gamma = 0 \Rightarrow \Gamma = -4A - B \quad (1)$$

$$\text{Ισχύει } d(N, \epsilon) = 1 \Rightarrow \frac{|5A + 3B + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1 \Rightarrow$$

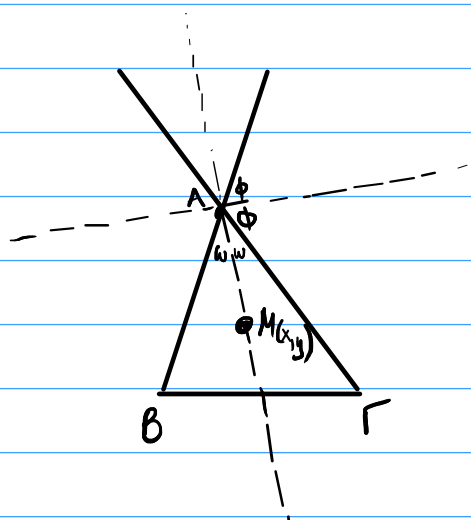
$$\Rightarrow |5A + 3B + \Gamma| = \sqrt{A^2 + B^2} \xrightarrow{(1)} (5A + 3B - 4A - B)^2 = A^2 + B^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A + 2B)^2 = A^2 + B^2 \Rightarrow \cancel{A^2} + 4AB + 4B^2 = \cancel{A^2} + B^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4AB + 3B^2 = 0 \Rightarrow B(4A + 3B) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 0 \quad \text{ή} \quad A = -\frac{3B}{4}$$

422. Θεωρούμε τα σημεία $A(3,2)$, $B(-1,-2)$ και $\Gamma(5,0)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.



$$\lambda_{AB} = \frac{-2-2}{-1-3} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$AB: y-2 = x-3 \Rightarrow x-y-1=0$$

$$\lambda_{AG} = \frac{0-2}{5-3} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$AG: y-2 = -(x-3) \Rightarrow x+y-5=0$$

Έστω $M(x,y)$ ένα σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$.
 Ισχύει $d(M, AB) = d(M, AG) \Rightarrow$

$$\frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x+y-5|}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$|x-y-1| = |x+y-5| \Rightarrow$$

$$\cancel{x-y-1} = \cancel{x+y-5} \vee \cancel{x-y-1} = -\cancel{x-y}+5 \Rightarrow$$

$$2y = 4 \vee 2x = 6 \Rightarrow$$

$$y = 2 \vee x = 3$$

415. Η μια πλευρά τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, με $A(2,-1)$, βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\epsilon: 3x-4y+20=0$.
 Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου.

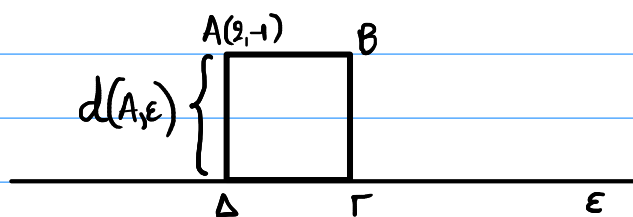
Ελέγχουμε αν το σημείο A ανήκει στην ϵ :

$$d(A, \epsilon) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) + 20|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 + 4 + 20|}{\sqrt{25}} = \frac{30}{5} = 6 \neq 0$$

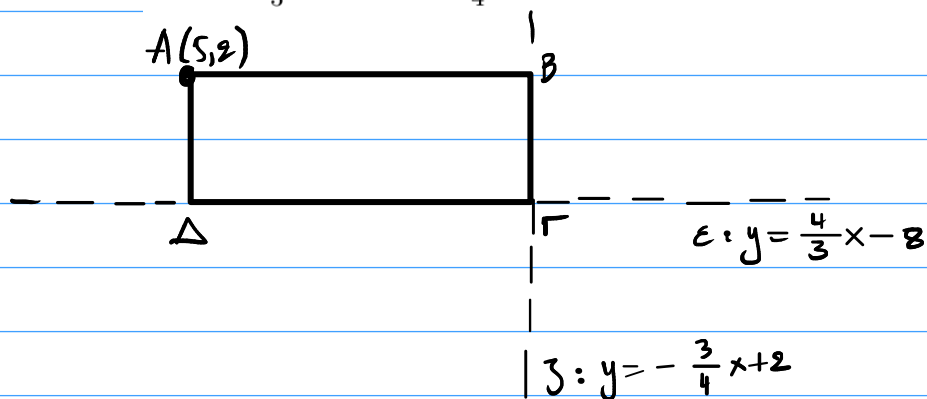
άρα $A \notin \epsilon$.

Είναι $(A\Delta) = d(A, \epsilon) = 6$

Άρα $(AB\Gamma\Delta) = (A\Delta)^2 = 36$ τ.μ.



417. Οι δύο πλευρές ενός ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, με $A(5,2)$, βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{4}{3}x - 8$ και $y = -\frac{3}{4}x + 2$. Να βρεθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου αυτού.



$$(AB) = d(A, \zeta)$$

$$(A\Delta) = d(A, \epsilon)$$

όρα

$$(AB\Gamma\Delta) = (AB) \cdot (A\Delta) = \dots$$

- Αν $B=0 (\Rightarrow A \neq 0)$ είναι $(1) \Rightarrow \Gamma = -4A$ να
 $Ax + By + \Gamma = 0 \Rightarrow Ax - 4A = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 4} \quad (\varepsilon_1)$

- Αν $A = -\frac{3B}{4} (\Rightarrow A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0)$ είναι

$$(1) \Rightarrow \Gamma = -4A - B = -4 \cdot \left(-\frac{3B}{4}\right) - B = 3B - B = 2B$$

$$\text{Άρα } Ax + By + \Gamma = 0 \Rightarrow -\frac{3B}{4} \cdot x + By + 2B = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3Bx + 4By + 8B = 0 \Rightarrow \boxed{-3x + 4y + 8 = 0} \quad (\varepsilon_2)$$