26/01/2026

414. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η ευθεία $\epsilon: (3\alpha-5)x+(\alpha-3)y-4\alpha+8=0$ ισαπέχει από τα σημεία $A(4,-3)$ και $B(3,2)$.

$\varepsilon: (3\alpha-5)x+(\alpha-3)y-4\alpha+8=0$

$(A\neq 0$ ή $B\neq 0) \Longrightarrow (\alpha\neq \frac{5}{3}$ ή $\alpha\neq 3) \Longrightarrow \alpha\in\mathbb{R}$

$d(A,\varepsilon)=d(B,\varepsilon) \Longrightarrow$

$|4(3\alpha-5)-3(\alpha-3)-4\alpha+8| = |3(3\alpha-5)+2(\alpha-3)-4\alpha+8| \Longrightarrow$

$|12\alpha-20-3\alpha+9-4\alpha+8| = |9\alpha-15+2\alpha-6-4\alpha+8| \Rightarrow$

$|5\alpha-3| = |7\alpha-13| \Longrightarrow$

$5\alpha-3 = 7\alpha-13$ ή $5\alpha-3=-7\alpha+13 \Longrightarrow$

$\alpha=5$ ή $\alpha=\frac{4}{3}$.

413. Να βρείτε την απόσταση του σημείου $M(\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$ από την ευθεία:

α. $\epsilon: y=-x\cdot\epsilon\phi\theta$,

β. $\epsilon: x\cdot\sigma\upsilon\nu\theta - y\cdot\eta\mu\theta=2$.

α) $\varepsilon: y=-x\cdot\varepsilon\varphi\vartheta \Longrightarrow x\cdot\eta\mu\vartheta+y\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta=0$

$$d(M,\varepsilon)=\frac{|\eta\mu\vartheta\cdot\eta\mu\vartheta+\sigma\upsilon\nu\vartheta\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta|}{\sqrt{\eta\mu^2\vartheta+\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}}=\frac{1}{1}=1$$

β) $\varepsilon: x\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta-y\cdot\eta\mu\vartheta=2 \Longrightarrow x\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta-y\cdot\eta\mu\vartheta-2=0$

$$d(M,\varepsilon)=\frac{|\cancel{\eta\mu\vartheta\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta}-\cancel{\sigma\upsilon\nu\vartheta\cdot\eta\mu\vartheta}-2|}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta+(-\eta\mu\vartheta)^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{1}}=2$$

419. α. Να βρείτε την απόσταση των παραλλήλων ευθειών που παριστάνει η εξίσωση $x^2+2xy+y^2-2x-2y-\mu^2=0$.

β. Για ποια τιμή του μ η απόσταση των παραπάνω ευθειών είναι ίση με $\sqrt{10}$;

α) $x^2+2xy+y^2-2x-2y-\mu^2=0 \Longrightarrow$

$(x+y)^2-2(x+y)-\mu^2=0 \Longrightarrow$

$(x+y)^2-2(x+y)+1=\mu^2+1 \Longrightarrow$

$(x+y-1)^2=\mu^2+1 \Longrightarrow$

$|x+y-1|=\sqrt{\mu^2+1} \Longrightarrow$

$x+y-1=\sqrt{\mu^2+1}$ ή $x+y-1=-\sqrt{\mu^2+1} \Longrightarrow$

$\underset{(\varepsilon_1)}{x+y-1-\sqrt{\mu^2+1}=0}$ ή $\underset{(\varepsilon_2)}{x+y-1+\sqrt{\mu^2+1}=0}$

Προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου της ε_1.
Στην ε_1 για $x=1$ είναι $\cancel{1}+y-\cancel{1}-\sqrt{\mu^2+1}=0 \Rightarrow y=\sqrt{\mu^2+1}$.
Άρα $A(1,\sqrt{\mu^2+1})\in\varepsilon_1$, $\mu\in\mathbb{R}$.

Ισχύει $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(A,\varepsilon_2)=\dfrac{|\cancel{1}+\sqrt{\mu^2+1}-\cancel{1}+\sqrt{\mu^2+1}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=$

$=\dfrac{2\sqrt{\mu^2+1}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2\mu^2+2}$.

β) $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\sqrt{10} \Longrightarrow$

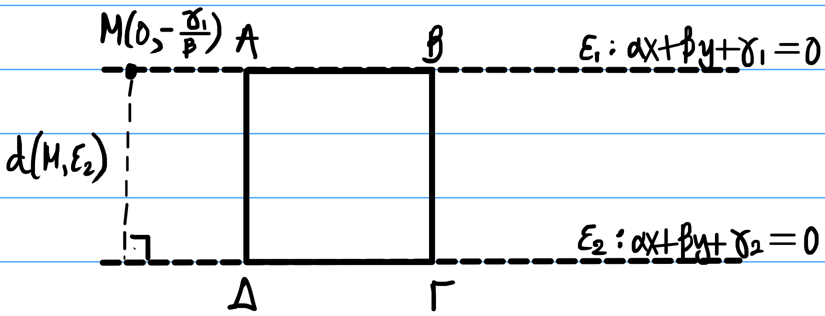
$\sqrt{2\mu^2+2}=\sqrt{10} \Longrightarrow$

$2\mu^2+2=10 \Longrightarrow$

$\mu^2=4 \Longrightarrow$

$\mu=2$ ή $\mu=-2$.

418. Οι δύο πλευρές ενός τετραγώνου βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $\alpha x+\beta y+\gamma_1=0$ και $\alpha x+\beta y+\gamma_2=0$. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν Ε του τετραγώνου ισχύει $E=\dfrac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{\alpha^2+\beta^2}$.



Στην ε_1 για $x=0$ είναι $\beta y+\gamma_1=0 \xrightarrow{\beta\neq 0} y=-\dfrac{\gamma_1}{\beta}$, άρα $M\left(0,-\dfrac{\gamma_1}{\beta}\right)$.

Είναι $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(M,\varepsilon_2)=\dfrac{\left|\alpha\cdot 0+\beta\cdot\left(-\dfrac{\gamma_1}{\beta}\right)+\gamma_2\right|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\dfrac{|\gamma_2-\gamma_1|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

Ισχύει $(AB\Gamma\Delta)=(A\Delta)^2=d^2(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\left(\dfrac{|\gamma_2-\gamma_1|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2=\dfrac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{\alpha^2+\beta^2}$.

4ο Θέμα

14970.Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο M(2, 1).
α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το M. Να βρείτε:
i. Την εξίσωση της.
ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες. (Μονάδες 6) (2+4)
β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.
i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ.
ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.
iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.
(Μονάδες 19) (6+7+6)

Λύση

α) i) $\varepsilon:\ y-1=\lambda(x-2)\Longrightarrow$
$y-1=\lambda x-2\lambda\Longrightarrow$
$y=\lambda x+1-2\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$

Εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το $M(x_0,y_0)$ και έχει σ.δ. λ:
$y-y_0=\lambda(x-x_0)$

ii) Για να σχηματίζει η ε τρίγωνο με τους άξονες πρέπει:
$\begin{cases}\lambda\neq 0\\ 1-2\lambda\neq 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\lambda\neq 0\\ \lambda\neq \frac{1}{2}\end{cases}$

β) i) xx': $y=0\Longrightarrow \lambda x=2\lambda-1\Longrightarrow x=\dfrac{2\lambda-1}{\lambda}$,
άρα $A\left(\dfrac{2\lambda-1}{\lambda},0\right)$ και $(OA)=\left|\dfrac{2\lambda-1}{\lambda}\right|$.

$yy': x=0 \Longrightarrow y=1-2\lambda$, άρα $B(0,1-2\lambda)$ και $(OB)=|1-2\lambda|$

ii) $\overset{\triangle}{AOB}$: ισοσκελές $\Longrightarrow$

$(OA)=(OB) \Longrightarrow$

$\left|\dfrac{2\lambda-1}{\lambda}\right| = |1-2\lambda| \Longrightarrow$

$|2\lambda-1| = |\lambda|\cdot|2\lambda-1| \xRightarrow{|2\lambda-1|\neq 0}$

$|\lambda|=1 \Longrightarrow$

$\lambda=1$ ή $\lambda=-1$

iii) $(AOB) = \dfrac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB) = \dfrac{1}{2}\cdot\left|\dfrac{2\lambda-1}{\lambda}\right|\cdot|1-2\lambda| = \dfrac{(2\lambda-1)^2}{2|\lambda|}$

- Αν $\lambda=1$, τότε $(AOB)=\dfrac{1}{2}$ τ.μ.
- Αν $\lambda=-1$, τότε $(AOB)=\dfrac{9}{2}$ τ.μ.