

27/01/2026

Κριτήριο 707. αυξάνων

- $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) &
 $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) τότε
η f έχει στο x_0 707. μέγιστο
- $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) &
 $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) τότε
η f έχει στο x_0 707. ελάχιστο
- $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο (α, x_0)
και (x_0, β) τότε είναι γι. ποσότητα
στο (α, β) & δεν έχει άκροτατο.

Θεώρημα Fermat

f ορισμένη στο Δ

- x_0 εσωτ. σημείο του Δ
- f παραγ. στο x_0
- f παρουσιάζει άκροτατο στο x_0

$$\begin{matrix} \tau & \omicron & \tau & \varepsilon \\ f'(x_0) = 0 \end{matrix}$$

3.62

$$x^2 + x \geq 2 + a \ln x, \quad x > 0 \quad (1)$$

$$\text{Έστω } f(x) = x^2 + x - a \ln x, \quad x > 0.$$

$$\dots f'(x) = 2x + 1 - \frac{a}{x}, \quad x > 0.$$

$$\text{Είναι } f(1) = 1 + 1 - a \ln 1 = 2.$$

Αρα $(1) \Rightarrow f(x) \geq f(1) \quad \forall x > 0$ αρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1.
Το 1 είναι εσωτερικό του $(0, +\infty)$, η f είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει
άκροτατο σε αυτό, άρα από το Θ. Fermat ισχύει:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow$$

$$2 + 1 - a = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{a = 3}$$

3.66 |

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$xf'(x) - 2f(x) = 6x^2 - 2x^3 - 6x \quad \forall x > 0 \quad (1)$$

$$a) (1) \xrightarrow{x>0} \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{6x^3 - 2x^4 - 6x^2}{x^4} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' = \left(6\ln x - 2x + \frac{6}{x} \right)' \quad \forall x > 0 \text{ dpa ons D'Ergebnis}$$

$$\exists c \in \mathbb{R} : \frac{f(x)}{x^2} = 6\ln x - 2x + \frac{6}{x} + c \Rightarrow$$

$$f(x) = 6x^2 \ln x - 2x^3 + 6x + cx^2, \quad x > 0.$$

$$b) f(x) \leq \frac{f(2)}{4} - \ln \frac{64}{e^5} \quad \forall x > 0$$

$$i) \frac{f(2)}{4} - \ln \frac{64}{e^5} = \frac{24\ln 2 - 16 + 12 + 4c}{4} - (\ln 64 - \ln e^5) =$$

$$= \cancel{6\ln 2} - 1 + c - \cancel{6\ln 2} + 5 = c + 4 = f(1)$$

$$\text{Apa } \forall x > 0 : f(x) \leq f(1) \quad \dots \xrightarrow{\text{Fermat}} f'(1) = 0$$

$$(1) \xrightarrow{x=1} -2f(1) = \cancel{6} - 2 - \cancel{6} \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow c + 4 = 1 \Rightarrow \boxed{c = -3}$$

$$ii) \text{ Για } c = -3 : f(x) = 6x^2 \ln x - 2x^3 + 6x - 3x^2, \quad x > 0$$

$$f'(x) = 12x \ln x + \cancel{6x} - 6x^2 + 6 - \cancel{6x} = 12x \ln x - 6x^2 + 6, \quad x > 0$$

$$f''(x) = 12 \ln x + 12 - 12x = 12 \ln x - 12x + 12, \quad x > 0$$

$$f'''(x) = \frac{12}{x} - 12 = \frac{12(1-x)}{x}, \quad x > 0$$

x	0	1	+
f'''		0	-
f''			

o.m.

$$\forall x > 0 : f''(x) \leq f''(1) \Rightarrow f''(x) \leq 0 \Rightarrow f' : \downarrow (0, +\infty) \text{ , } f'(1) = 0$$

- $\forall x > 0$ με:
- $x < 1 \xrightarrow{f' \downarrow} f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f: \uparrow (0, 1]$
 - $x > 1 \xrightarrow{f' \downarrow} f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f: \downarrow [1, +\infty)$
- # f παρουσιάζει ολ. μέγ. στο $x=1$, το $f(1)=1$.

3.74

$$K(x) = \frac{\alpha}{4} x^3, \quad x \in (0, +\infty), \quad \alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$$

$$E(x) = x^2, \quad x \in (0, +\infty)$$

a) $f(x) = E(x) - K(x) = x^2 - \frac{\alpha}{4} x^3, \quad x > 0$

... $f'(x) = 2x - \frac{3\alpha}{4} x^2, \quad x > 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 8x - 3\alpha x^2 = 0 \Rightarrow x(8 - 3\alpha x) = 0 \xrightarrow{x > 0} x = \frac{8}{3\alpha}$$

x	0	$\frac{8}{3\alpha}$	$+\infty$
f'		+	-
f		$\nearrow$	$\searrow$

$M(\alpha)$

... $x_0 = \frac{8}{3\alpha}$

b) $M(\alpha) = f\left(\frac{8}{3\alpha}\right) = \left(\frac{8}{3\alpha}\right)^2 - \frac{\alpha}{4} \left(\frac{8}{3\alpha}\right)^3 = \frac{64}{9\alpha^2} - \frac{\cancel{\alpha}}{4} \cdot \frac{512}{27\alpha^3} =$

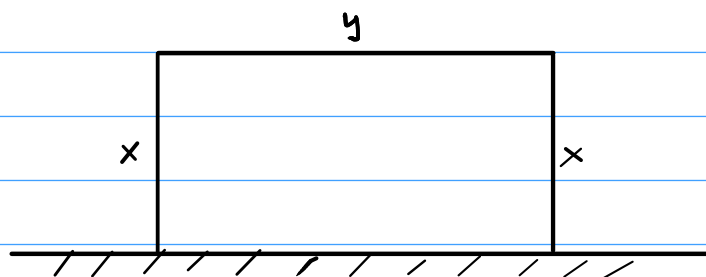
$$= \frac{3 \cdot 64 - 128}{27\alpha^2} = \frac{64}{27\alpha^2}.$$

$$M(\alpha) = \frac{64}{27\alpha^2}, \quad \alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$$

$$M'(\alpha) = \frac{64}{27} (\alpha^{-2})' = -\frac{128}{27\alpha^3} < 0 \quad \forall \alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$$

οπότε $M: \downarrow \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$ οπότε παρουσιάζει ολ. μέγ. στο $\alpha = \frac{2}{9}$,
 το $M\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{64}{27} \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{64}{27} \cdot \frac{81}{4} = 48$.

3.75



α) Ισχύει $y + 2x = 600 \Rightarrow y = 600 - 2x$
 Πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 600 - 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 300 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 300$
 $E(x) = (600 - 2x) \cdot x = 600x - 2x^2 = -2x^2 + 600x.$

β) ... $E'(x) = -4x + 600, x \in (0, 300)$

$E'(x) = 0 \Rightarrow x = 150$

x	0	150	300
E'		+	-
E		↗	↘

o.m.

γ) $E(150) = 300 \cdot 150 = 45.000 \text{ m}^2$

3.72

$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = -2x^2 + 4x - (x + \alpha) \ln x, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

α) ... $f'(x) = -4x + 4 - \ln x - \frac{x + \alpha}{x}, x > 0$

$f(1) = -2 + 4 - (1 + \alpha) \ln 1 = 2$

$\forall x > 0: f(x) \leq 2 \Rightarrow f(x) \leq f(1) \Rightarrow \dots \xrightarrow{\text{Fermat}} f'(1) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \cancel{-4} + \cancel{4} - \ln 1 - 1 - \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$

β) i) $f(x) = -2x^2 + 4x - (x - 1) \ln x, x > 0$

$f'(x) = -4x + 4 - \ln x - \frac{x - 1}{x} =$

$= -4x + 4 - \ln x - 1 + \frac{1}{x} =$

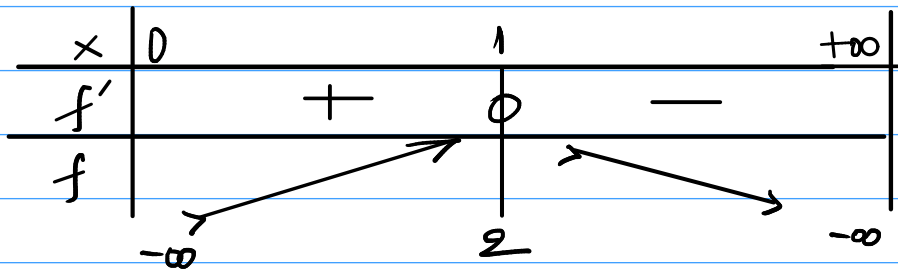
$= -4x + 3 - \ln x + \frac{1}{x}, x > 0.$

$$f''(x) = -4 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x > 0 \implies f' : \downarrow (0, +\infty)$$

$$\mu \varepsilon \quad f'(1) = 0$$

$\forall x > 0 \quad \mu \varepsilon :$

- $x < 1 \xrightarrow{f' : \downarrow} f'(x) > f'(1) \implies f'(x) > 0$
- $x > 1 \xrightarrow{f' : \downarrow} f'(x) < f'(1) \implies f'(x) < 0$



$$f(x) = -2x^2 + 4x - (x-1)\ln x$$

$$f(x) = -2026 \quad \text{dupădăris} \quad 2 \quad \text{20615}$$