

28/01/2026

3.57

$$f(x) = 2e^{x+1} - 2x - 3, x \in \mathbb{R}$$

a) ... $f'(x) = 2e^{x+1} - 2$

... $f''(x) = 2e^{x+1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, άρα $f': \uparrow \mathbb{R}$ και $f'(-1) = 2 - 2 = 0$.

• $x < -1 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(x) < f'(-1) \Rightarrow f'(x) < 0$ άρα $f: \downarrow (-\infty, -1]$

• $x > -1 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(x) > f'(-1) \Rightarrow f'(x) > 0$ άρα $f: \uparrow [-1, +\infty)$

Γιεννη $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, -1)$ και $f'(x) > 0$ στο $(-1, +\infty)$ $\Rightarrow$ f αποκρίβη ορμω ερδχμω στο $x = -1$, το $f(-1) = 2 + 2 - 3 = 1$.

β) $a, b \in \mathbb{R} : f(a-b) + f(2b-a) = 2$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(-1) \Rightarrow f(x) \geq 1, \text{ ενώ } f(x) = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$\text{Ιδμω } \begin{cases} f(a-b) \geq 1 \\ f(2b-a) \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{(+)} f(a-b) + f(2b-a) \geq 2$$

άρα για να ισχύει $f(a-b) + f(2b-a) = 2$ πρέπει $\begin{cases} f(a-b) = 1 \\ f(2b-a) = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b = -1 \\ 2b-a = -1 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \boxed{b = -2} \text{ και } a+2 = -1 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

γ) $g(x) = 2e^{x+1} - x^2 - 3x, x \in \mathbb{R}$.

... $g'(x) = 2e^{x+1} - 2x - 3 = f(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Άρα $g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ οπότε $g: \uparrow \mathbb{R}$.

350 |

a) $f(0)=1$

$$f'(x) - f(x) = x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

i) $h(x) = \frac{f(x)+x}{e^x}$: βραδύτητα

$$h'(x) = \frac{(f'(x)+1)e^x - (f(x)+x)e^x}{e^{2x}} = \frac{f'(x)+1-f(x)-x}{e^x} \stackrel{(1)}{=} 0$$

$$= \frac{x-1+1-x}{e^x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ άρα } h: \text{βραδύτητα.}$$

ii) $h: \text{βραδύτητα στο } \mathbb{R} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \frac{f(x)+x}{e^x} = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Για } x=0 \Rightarrow c=1, \text{ άρα}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{f(x)+x}{e^x} = 1 \Rightarrow f(x) = e^x - x.$$

iii) ... $f'(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \stackrel{e^x: \uparrow}{\Rightarrow} x > 0 \rightarrow f: \uparrow [0, +\infty)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x < 0 \rightarrow f: \downarrow (-\infty, 0]$$

Επειδή ... ολ. ελκx στο $x=0$, το $f(0)=1$

β) $g^3(x) + e^{g(x)} = e^x - \frac{x^2}{2} - 2026 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$

$$\dots 3g^2(x) \cdot g'(x) + e^{g(x)} \cdot g'(x) = e^x - x \Rightarrow$$

$$(3g^2(x) + e^{g(x)}) \cdot g'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} 3g^2(x) + e^{g(x)} > 0 \\ f(x) \geq 1 > 0 \end{cases} \text{ άρα } g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

οπότε $g: \uparrow \mathbb{R}$ και δεν έχει άνω όριο.

3.52

$$f(x) = e^{2x} - 2xe^{2x} - 2, x \in \mathbb{R}$$

$$\alpha) \dots f'(x) = \cancel{2e^{2x}} - \cancel{2e^{2x}} - 4xe^{2x} = -4xe^{2x}, x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		+	-
f			

o.m.
-1

$$\begin{aligned} \beta) \quad 1 + e^{-2x} 6\sqrt{x} &= 2x + 2e^{-2x} \Rightarrow \\ e^{2x} + 6\sqrt{x} &= 2xe^{2x} + 2 \Rightarrow \\ e^{2x} - 2xe^{2x} - 2 &= -6\sqrt{x} \Rightarrow \\ f(x) &= -6\sqrt{x} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \leq f(0) \Rightarrow f(x) \leq -1 \text{ με } f(x) = -1 \Rightarrow x = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: -1 \leq 6\sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -6\sqrt{x} \leq 1$$

$$\text{Άρα } \forall x \in \mathbb{R}: \begin{cases} f(x) \leq -1 \\ -6\sqrt{x} \geq -1 \end{cases}$$

Είναι $-6\sqrt{0} = -1 = f(0)$, άρα η (1) έχει μον. λύση $x = 0$.