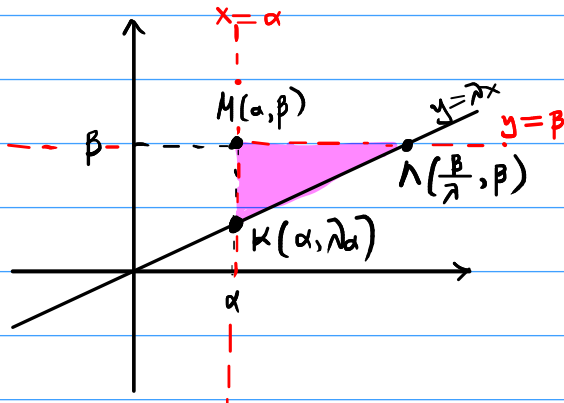


28/01/2026

432. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου, του οποίου οι πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$, $y = \beta$ και $y = \lambda x$ (όπου $\lambda \neq 0$ και $\beta \neq \lambda\alpha$), είναι $E = \frac{(\beta - \lambda\alpha)^2}{2|\lambda|}$.



Συν $y = \lambda x$:

• Για $x = \alpha$, $y = \lambda\alpha$
 άρα $K(\alpha, \lambda\alpha)$

• Για $y = \beta$, $\beta = \lambda x \Rightarrow x = \frac{\beta}{\lambda}$
 άρα $L(\frac{\beta}{\lambda}, \beta)$

$$\vec{KM} = (\alpha - \alpha, \beta - \lambda\alpha) = (0, \beta - \lambda\alpha)$$

$$\vec{KL} = (\frac{\beta}{\lambda} - \alpha, \beta - \lambda\alpha) = (\frac{\beta - \lambda\alpha}{\lambda}, \beta - \lambda\alpha)$$

$$\begin{aligned} (KLM) &= \frac{1}{2} |\det(\vec{KM}, \vec{KL})| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & \beta - \lambda\alpha \\ \frac{\beta - \lambda\alpha}{\lambda} & \beta - \lambda\alpha \end{vmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| -\frac{(\beta - \lambda\alpha)^2}{\lambda} \right| = \frac{(\beta - \lambda\alpha)^2}{2|\lambda|}. \end{aligned}$$

435. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^2 + y^2 - 4xy - 8x + 4y + 3 = 0$ παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες και στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές με τους άξονες.

$$4x^2 + y^2 - 4xy - 8x + 4y + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 4(2x - y) + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$(2x - y)^2 - 4(2x - y) + 3 = 0 \xrightarrow{2x - y = w}$$

$$w^2 - 4w + 3 = 0 \Rightarrow$$

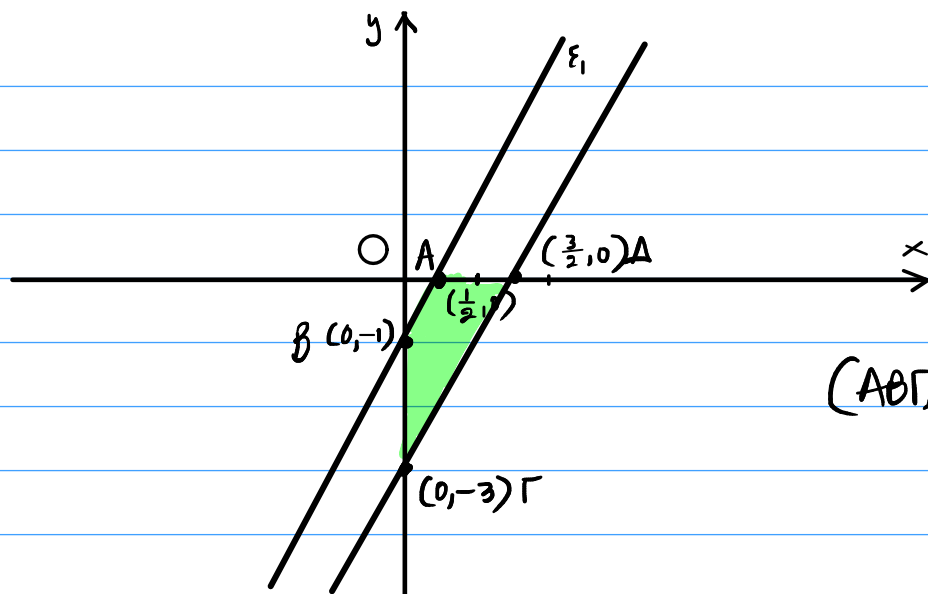
$$w = 1 \text{ ή } w = 3 \Rightarrow$$

$$2x - y - 1 = 0 \text{ ή } 2x - y - 3 = 0$$

(ϵ_1)

(ϵ_2)

Οι $\epsilon_1: y = 2x - 1$ και $\epsilon_2: y = 2x - 3$ έχουν $\lambda_{\epsilon_1} = \lambda_{\epsilon_2} = 2$, άρα $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$.



$$(AB\Gamma\Delta) = (O\Gamma\Delta) - (OAB)$$

$$(O\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} |\det(\vec{O\Gamma}, \vec{O\Delta})| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{9}{2} \right| = \frac{9}{4} \text{ τ.μ.}$$

$$(OAB) = \frac{1}{2} |\det(\vec{OA}, \vec{OB})| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4}$$

$$\text{Άρα } (AB\Gamma\Delta) = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ τ.μ.}$$

434. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(1, -4)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $E = 1$.

Έστω $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$, $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ η ζητούμενη ευθεία.

Αν $A = 0$ τότε $\varepsilon \parallel xx'$ και δεν σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες, επομένως άρα $A \neq 0$. Ομοίως και $B \neq 0$.

Έστω ε :

- Για $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{\Gamma}{B}$ και $\Lambda(0, -\frac{\Gamma}{B})$
- Για $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{\Gamma}{A}$ και $\Lambda(-\frac{\Gamma}{A}, 0)$.

$$\text{Ισχύει } M(1, -4) \in \varepsilon, \text{ άρα } A - 4B + \Gamma = 0 \Rightarrow \Gamma = 4B - A \quad (1)$$

$$\text{Ισχύει } E = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{\Gamma}{B} \right| \cdot \left| -\frac{\Gamma}{A} \right| = 1 \Rightarrow$$

$$|\Gamma| = 2|A| \Rightarrow$$

$$\Gamma = 2A \text{ ή } \Gamma = -2A.$$

$$\text{Av } \Gamma = 2A, \text{ woz (1)} \Rightarrow 2A = 4B - A \Rightarrow B = \frac{3A}{4}$$

$$\text{onoz (E}_1\text{): } Ax + By + \Gamma = 0 \Rightarrow Ax + \frac{3A}{4}y + 2A = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{3}{4}y + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{4x + 3y + 8 = 0}$$

$$\text{Av } \Gamma = -2A, \text{ woz (1)} \Rightarrow -2A = 4B - A \Rightarrow B = -\frac{A}{4}$$

$$\text{onoz (E}_2\text{): } Ax + By + \Gamma = 0 \Rightarrow Ax - \frac{A}{4}y - 2A = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{4}y - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{4x - y - 8 = 0}$$